ACADEMIA ROMÂNĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1

TOMUL 49

Ianuarie — februarie

1990

EXTRAS

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

CALCULUL DISCURILOR ȘI PLĂCILOR CIRCULARE ÎNCĂRCATE AXIAL SIMETRIC PRIN METODA DE RECURENȚĂ A CELOR TREI NECUNOSCUTE

de P. CIZMAȘ

Institutul Politehnic, București

Considerînd o variație hiperbolică a grosimii discului pe rază cît și o variație hiperbolică a rigidității la încovoiere a plăcii circulare se obțin ecuațiile diferențiale de echilibru într-o formă asemănătoare. Discretizînd discurile și plăcile de grosime variabilă prin tronsoane cu variație hiperbolică s-au calculat tensiunile printr-un algoritm unic, folosind metoda de recurență a celor trei necunoscute.

1. INTRODUCERE

Calculul discurilor și plăcilor circulare de grosime variabilă prin metoda de recurență a celor trei necunoscute s-a făcut în [1], [2] prin aproximarea discului/plăcii cu tronsoane de grosime constantă. Calculul discurilor cu grosime variind hiperbolic s-a efectuat în [3] prin metoda celor două calcule.

Discretizînd discurile și plăcile prin tronsoane cu variație hiperbolică s-au obținut ecuații diferențiale de echilibru similare, permițîndu-se abordarea printr-o metodologie comună, utilizînd metoda de recurență a celor trei necunoscute.

2. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE ECHILIBRU

2.1. CAZUL DISCULUI ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE

În cazul unui disc ce se rotește cu viteza unghiulară ω, avînd o distribuție de temperatură cunoscută pe rază (constantă pe grosimea discului la o rază dată) se obține ecuația diferențială de echilibru ([3], p. 37):

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(1+\frac{r}{h}\cdot\frac{dh}{dr}\right)\frac{du}{dr}-\left(1-\nu\frac{r}{h}\cdot\frac{dh}{dr}\right)\frac{u}{r^2}+\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r-$$

$$-(1+\nu)\left(\frac{d\theta}{dr}+\frac{\theta}{h}\frac{dh}{dr}\right)=0. \tag{1}$$

Considerînd variația hiperbolică a grosimii pe rază:

$$h=h_0 r^{-\beta}$$

și înlocuind-o în ecuația (1) se obține:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1-\beta}{r}\frac{du}{dr}-\frac{1+\nu\beta}{r^2}u=f_1(r,\ \omega,\ \theta), \tag{3}$$

unde pentru o variație liniară a deformației specifice datorată gradientului de temperatură :

$$\theta = \theta_1 + \lambda(r - r_1), \tag{4}$$

termenul liber este :

$$f_1(r, \omega, \theta) = \lambda(1 + \nu)(1 - \beta) - \beta(1 + \nu)\frac{\theta_1 - \lambda r_1}{r} - \frac{1 - \nu^2}{E}\rho\omega^2 r. \tag{5}$$

2.2. CAZUL PLĂCII CIRCULARE

Fie o placă circulară, încărcată axial simetric, cu o variație oarecare a grosimii pe rază. Scriind că elementul de placă este în echilibru sub efectul eforturilor aplicate asupra lui, se obține ecuația diferențială ([4]) :

$$D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} + \frac{\Phi}{r}\right) + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\Phi}{r}\right) = -Q. \tag{6}$$

Pentru o variație hiperbolică a rigidității la încovoiere :

$$D = D_0 r^{-\beta}, \tag{7}$$

ecuația diferențială de echilibru (6) devine :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1 - \beta}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} - \frac{1 + \nu\beta}{r^2}\Phi = f_2(r, Q), \tag{8}$$

unde $f_2(r, Q) = -\dfrac{Q}{D_0 r^{-\beta}}$. (9)

2.3. SOLUȚIILE ECUAȚIILOR DE ECHILIBRU

Din relațiile (3), (8) se observă că ecuațiile de echilibru ale discului și plăcii circulare diferă doar prin termenii liberi f_1 și f_2. De aceea soluțiile ecuațiilor omogene vor fi identice :

$$u_0 = A_u r^m + B_u r^{-n}, \tag{10a}$$

$$\Phi_0 = A_\Phi r^m + B_\Phi r^{-n}, \tag{10b}$$

unde A_u, A_Φ, B_u și B_Φ sînt constante ce se determină din condițiile la limită, iar

$$m = \frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \nu\beta + \frac{\beta^2}{4}}, \tag{11a}$$

$$n = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \nu\beta + \frac{\beta^2}{4}}. \tag{11b}$$

În cazul discului, ţinînd seama de expresia termenului liber f_1 din relaţia (5), se va căuta soluţia particulară u_p de forma :

$$u_p = c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3. \tag{12}$$

Prin identificarea termenilor în r se obţin constantele c_1, c_2, c_3 astfel încît soluţia particulară este :

$$u_p = (\theta_1 - \lambda r_1) r + \frac{\lambda(1+\nu)(1-\beta)}{3-\beta(2+\nu)} r^2 + \rho \frac{\omega^2(1-\nu^2)}{E[8-\beta(3+\nu)]} r^3. \tag{13}$$

În cazul plăcii circulare încărcate simetric, ţinînd seama de definiţia forţei de forfecare :

$$2\pi r Q = F_i + \pi(r^2 - r_i^2) p_i \tag{14}$$

şi de expresia termenului liber f_2 din relaţia (9), se obţine :

$$\Phi_p = -\frac{F_i}{2\pi D_0 \beta r^{-\beta-1}(1-\nu)} - \frac{p_i}{2D_0 r^{-\beta-1}} \left[\frac{r^2}{8+\beta(3-\nu)} - \frac{r_i^2}{\beta(1-\nu)} \right]. \tag{15}$$

Relaţiile (10—15) conduc la următoarele soluţii ale ecuaţiilor de echilibru :

$$u = u_0 + u_p = A_u r^m + B_u r^{-n} + (\theta_1 - \lambda r_1) r + \frac{\lambda(1+\nu)(1-\beta)}{3-\beta(2+\nu)} r^2 - \rho \frac{\omega^2(1-\nu^2)}{E[8-\beta(3+\nu)]} r^3, \tag{16a}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_p = A_\Phi r^m + B_\Phi r^{-n} - \frac{F_i}{2\pi D_0 \beta(1-\nu)} r^{\beta+1} - \frac{p_i}{2D_0} r^{\beta+1} \left[\frac{r^2}{8+\beta(3-\nu)} - \frac{r_i^2}{\beta(1-\nu)} \right]. \tag{16b}$$

3. EXPRESIILE TENSIUNILOR ÎN DISC ŞI ALE MOMENTELOR ÎNCOVOIETOARE ÎN PLACA CIRCULARĂ

Avînd determinate funcţiile $u(r)$ şi $\Phi(r)$, rezultă tensiunile şi momentele încovoietoare :

— disc în rotaţie, cu variaţie de temperatură pe rază ([3], p. 54).

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} - \theta(1+\nu) \right], \tag{17a}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - \theta(1+\nu) \right]; \tag{17b}$$

— placă circulară (cu temperatură constantă)[5]:

$$\sigma_\theta = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\Phi}{r} + \nu\frac{d\Phi}{dr}\right), \tag{18a}$$

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d\Phi}{dr} + \nu\frac{\Phi}{r}\right), \tag{18b}$$

$$M_t = D\left(\frac{d\Phi}{dr} + \nu\frac{\Phi}{r}\right), \tag{18c}$$

$$M_r = D\left(\frac{\Phi}{r} + \nu\frac{d\Phi}{dr}\right). \tag{18d}$$

Înlocuind expresiile lui $u(r)$ și $\Phi(r)$ din relațiile (16a, b) în relațiile (17a, b) și (18c, d) se obțin tensiunile σ_θ, σ_r în disc și placă (tabelul 1).

Tabelul 1

Expresiile tensiunilor în disc și în placa circulară

	Disc	Placa
Parametrul variabil	$h = h_0 r^{-\beta}$	$D = D_0 r^{-\beta}$
ecuația diferențială	$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1-\beta}{r}\frac{du}{dr} - \frac{1+\nu\beta}{r^2}u = f_1(r, \omega, \theta)$	$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1-\beta}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1+\nu\beta}{r^2}\Phi = f_2(r, Q)$
constante	$\beta = -\frac{\ln h_1/h_2}{\ln r_1/r_2}$; $h_0 = r_1^\beta h_1$	$\beta = -3\frac{\ln h_1/h_2}{\ln r_1/r_2}$; $D_0 = r_1^\beta D_1$
	$u = A_u r^m + B_u r^{-n} + u_p$	$\Phi = A_\Phi r^m + B_\Phi r^{-n} + \Phi_p$
soluția ecuației diferențiale	$m = \frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \nu\beta + \frac{\beta^2}{4}}$; $n = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \nu\beta + \frac{\beta^2}{4}}$	
tensiuni σ_θ	$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{A_u[r^{m-1}(1+\nu m)] + B_u[r^{-n-1}\times(1-\nu n)] + \frac{u_p}{r} + \nu u_p' - \theta(1+\nu)\right\}$	$\frac{Ez}{1-\nu^2}\left\{A_\Phi[r^{m-1}(1+\nu m)] + B_\Phi\times[r^{-n-1}(1-\nu n)] + \frac{\Phi_p}{r} + \nu\Phi_p'\right\}$
σ_r	$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{A_u[r^{m-1}(m+\nu)] + B_u[r^{-n-1}\times(\nu-n)] + u_p' + \nu\frac{u_p}{r} - \theta(1+\nu)\right\}$	$\frac{Ez}{1-\nu^2}\left\{A_\Phi[r^{m-1}(m+\nu)] + B_\Phi\times[r^{-n-1}(\nu-n)] + \Phi_p' + \nu\frac{\Phi_p}{r}\right\}$

În cazul plăcii este mai comod ca în programul de calcul să se lucreze cu expresiile momentelor M_t, M_r:

$$M_t = D\left\{A_\Phi[r^{m-1}(m+\nu)] + B_\Phi[r^{-n-1}(\nu-n)] + \Phi_p' + \nu\frac{\Phi_p}{r}\right\}, \tag{19a}$$

$$M_r = D\left\{A_\Phi[r^{m-1}(1+m\nu)] + B_\Phi[r^{-n-1}(1-n\nu)] + \frac{\Phi_p}{r} + \nu\Phi_p'\right\}. \tag{19b}$$

4. METODA DE RECURENȚĂ A CELOR TREI NECUNOSCUTE

Fie un disc în mișcare de rotație, solicitat de sarcini laterale, axialsimetrice. Determinarea stării de tensiune se poate face prin suprapunerea efectelor rotației și ale sarcinii laterale, calculînd deci un disc și o placă circulară.

Împărțind discul în n tronsoane trebuie determinate pe rînd cele $2n$ necunoscute A_{ui}, B_{ui} și $A_{\Phi i}$, $B_{\Phi i}$, folosind metodologii diferite, specifice discului și plăcii.

Metoda de recurență a celor trei necunoscute permite determinarea constantelor A_{ui}, B_{ui} și $A_{\Phi i}$, $B_{\Phi i}$ printr-o metodă unică.

Ținînd seama de asemănarea între expresiile tensiunilor în disc și placă se obține un algoritm unitar și eficient, concretizat într-un program de calcul rapid și compact.

Pentru stabilirea relației de recurență a celor trei necunoscute se presupune că din integrarea unei ecuații diferențiale cu coeficienți constanți (de exemplu ecuația (1) sau (6) se pot obține două funcții oarecare (σ_r, σ_0 sau M_r, M_t) ce depind de constantele de integrare. Forma generală a acestor ecuații va fi ([6], p. 716):

$$\varphi = Aa(r) + Bb(r) + c(r), \tag{20a}$$

$$\psi = Ad(r) + Be(r) + f(r), \tag{20b}$$

unde cu A și B s-au înlocuit constantele de integrare A_u (sau A_Φ) și B_u (sau B_Φ).

Considerăm că discul/placa studiată a fost discretizat în n tronsoane (corespunzînd a n porțiuni de încărcare). Deoarece în punctele de trecere de la un interval la altul funcțiile pot avea discontinuități, în punctul i (fig. 1) funcția va avea valorile φ_i^{st} la stînga lui i și $\varphi_i^{dr} = \varphi_i$ la dreapta; similar pentru funcția ψ se va nota ψ_i^{st} și $\psi_i^{dr} = \psi_i$.

Între cele două funcții φ și ψ, la stînga și dreapta punctului i pot scrie relațiile:

$$\varphi_i^{st} = k_1\varphi_i, \tag{21a}$$

$$\varphi_{i+1}^{st} = k_4\varphi_{i+1}, \tag{21b}$$

$$\psi_i^{st} = k_2\psi_i + k_3\varphi_i, \tag{21c}$$

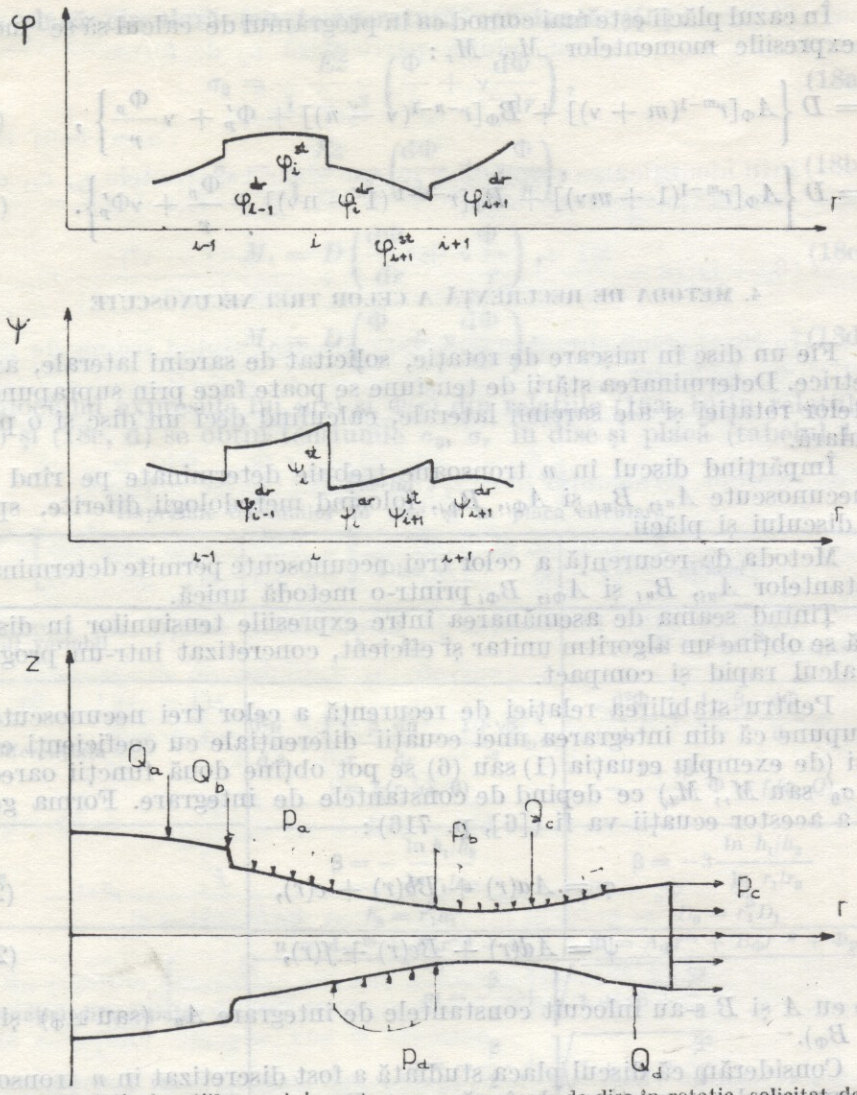

Fig. 1. — Variaţia funcţiilor φ şi ψ pentru un caz oarecare de disc în rotaţie, solicitat de forţe şi presiuni laterale.

unde constantele k_j, $j = \overline{1,4}$ au valorile :

— pentru disc :

$$k_1 = \frac{h_i^{st}}{h_i^{dr}}, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = \nu(k_1 - 1), \quad k_4 = \frac{h_{i+1}^{st}}{h_{i+1}^{dr}}, \tag{22}$$

— pentru placă :

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \left(\frac{h_i^{dr}}{h_i^{st}}\right)^3, \quad k_3 = \nu(1 - k_2), \quad k_4 = 1. \tag{23}$$

Scriind ecuaţiile (20) pentru două tronsoane consecutive (tronsonul I cuprins între punctele $i-1$ şi i, tronsonul II cuprins între punctele i şi $i+1$), exprimînd pe φ în cele patru puncte $(i-1)^{dr}$, i^{st}, i^{dr}, $(i+1)^{st}$ şi înlocuind valorile lui ψ în relaţia (21c) se obţine un sistem cu cinci ecuaţii liniare şi patru necunoscute (constantele A şi B pe tronsoanele I şi II). Condiţia de compatibilitate a sistemului furnizează relaţia între necunoscutele φ_{i-1}, φ_i, φ_{i+1}, care stă la baza metodei de recurenţă ([6], p. 719):

$$-\varphi_{i-1}\frac{P}{M}+\varphi_i\left(k_2\frac{S}{N}+k_1\frac{R}{M}-k_3\right)-\varphi_{i+1}\frac{T}{N}k_2k_4=$$

$$=-c^{\mathrm{I}}_{i-1}\frac{P}{M}+c^{\mathrm{I}}_i\frac{R}{M}+c^{\mathrm{II}}_ik_2\frac{S}{N}-c^{\mathrm{II}}_{i+1}k_2\frac{T}{N}-(f^{\mathrm{I}}_i-f^{\mathrm{II}}_ik_2), \tag{24}$$

unde

$$\begin{aligned} M &= a^{\mathrm{I}}_{i-1}b^{\mathrm{I}}_i-a^{\mathrm{I}}_ib^{\mathrm{I}}_{i-1}, & N &= a^{\mathrm{II}}_i\,b^{\mathrm{II}}_{i+1}-a^{\mathrm{II}}_{i+1}b^{\mathrm{II}}_i,\\ P &= a^{\mathrm{I}}_ie^{\mathrm{I}}_i-d^{\mathrm{I}}_ib^{\mathrm{I}}_i, & R &= a^{\mathrm{I}}_{i-1}e^{\mathrm{I}}_i-d^{\mathrm{I}}_ib^{\mathrm{I}}_{i-1}, \\ S &= e^{\mathrm{II}}_ia^{\mathrm{II}}_{i+1}-b^{\mathrm{II}}_{i-1}d^{\mathrm{II}}_i, & T &= e^{\mathrm{II}}_ia^{\mathrm{II}}_i-b^{\mathrm{II}}_id^{\mathrm{II}}_i. \end{aligned} \tag{25}$$

În cazul unui exemplu cu n tronsoane se pot scrie numai $n-2$ ecuaţii de tipul (24). Pentru rezolvarea sistemului mai sînt necesare două relaţii, acestea fiind condiţiile la limită ale problemei date. În cazul discului sau plăcii pot fi: deplasări sau deformaţii unghiulare cunoscute, tensiuni sau momente date (la raza interioară şi exterioară).

Sistemul de n ecuaţii în necunoscutele φ_i este de tip bandă, cu lăţime de trei, pentru rezolvarea căruia se poate folosi o metodă recursivă, foarte rapidă. Avînd determinate valorile lui φ_i, se pot calcula apoi necunoscutele ψ_i, cu relaţia:

$$\psi(r)=\frac{(b^{\mathrm{I}}_{i-1}c^{\mathrm{I}}_i-c^{\mathrm{I}}_{i-1}b^{\mathrm{I}}_i)\,d^{\mathrm{I}}(r)+(a^{\mathrm{I}}_ic^{\mathrm{I}}_{i-1}-a^{\mathrm{I}}_{i-1}c^{\mathrm{I}}_i)e^{\mathrm{I}}(r)}{a^{\mathrm{I}}_{i-1}b^{\mathrm{I}}_i-a^{\mathrm{I}}_ib^{\mathrm{I}}_{i-1}}+f^{\mathrm{I}}(r)+$$

$$+\varphi_{i-1}\frac{b^{\mathrm{I}}_i\,d^{\mathrm{I}}(r)-a^{\mathrm{I}}_i\,e^{\mathrm{I}}(r)}{a^{\mathrm{I}}_{i-1}\,b^{\mathrm{I}}_i-a^{\mathrm{I}}_i\,b^{\mathrm{I}}_{i-1}}+\varphi_i\frac{a^{\mathrm{I}}_{i-1}\,e^{\mathrm{I}}(r)-b^{\mathrm{I}}_{i-1}\,d^{\mathrm{I}}(r)}{a^{\mathrm{I}}_{i-1}\,b^{\mathrm{I}}_i-a^{\mathrm{I}}_i\,b^{\mathrm{I}}_{i-1}}, \tag{26}$$

care a fost obţinută prin determinarea în prealabil a constantelor de integrare A şi B.

5. EXEMPLE DE CALCUL

5.1. DISC DE TURBINĂ

Se consideră discul din figura 2*a* ([7]), avînd turaţia $n=11500$ rot/min şi variaţia de temperatură pe rază prezentată în figura 2*b* (temperatura este considerată constantă pe grosimea discului).

Presiunea, la diametrul exterior, datorată forței centrifuge ce ia naștere în palete este de 59,8 MPa.

Tensiunile σ_r și σ_t s-au determinat prin metoda celor două calcule, metoda elementului finit și metoda celor trei necunoscute. În cazul

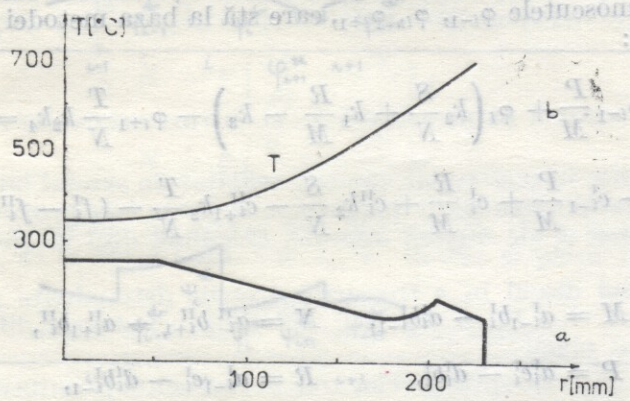

Fig. 2. — Disc turbină: *a* — geometrie; *b* — variația temperaturii pe raza.

raza (mm)	0	50	80	110	143	177	203	217	230
grosimea (mm)	111	111	96	80	63	54	69	58	48

utilizării metodei celor două calcule discul a fost înlocuit cu un profil în trepte, format din opt tronsoane de grosime constantă (fig. 3*a*, [8]).

Pentru calculul discului cu metoda elementului finit s-a utilizat programul SAP, considerîndu-se piesa discretizată în 51 elemente (fig.3*b*).

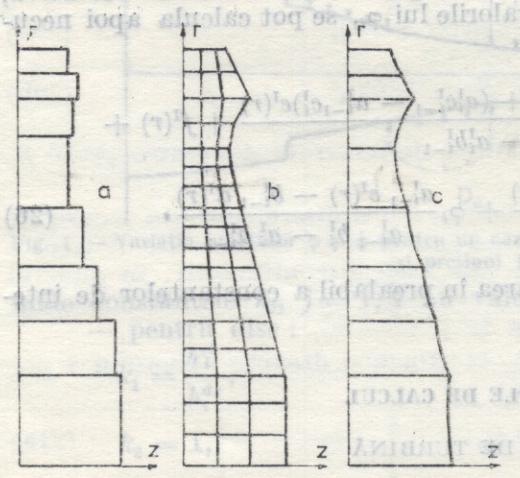

Fig. 3.—Discretizarea discului: a — metoda celor două calcule; b — metoda elementului finit (51 elemente); c — metoda celor trei necunoscute (8 tronsoane).

În cazul metodei celor trei necunoscute a fost utilizat un program original, scris în limbajul FORTRAN. Discul a fost împărțit în 8 și respectiv 16 tronsoane, a căror grosime s-a considerat că variază hiperbolic (fig. 3*c*).

Rezultatele sînt prezentate în figura 4. Se observă că valorile tensiunii radiale calculate prin metoda celor trei necunoscute și metoda celor două calcule sînt apropiate (diferența maximă fiind de 6%).

În cazul metodei celor trei necunoscute se obține o diferență maximă de 2% între valorile tensiunilor calculate cu discretizarea de 8 și respectiv

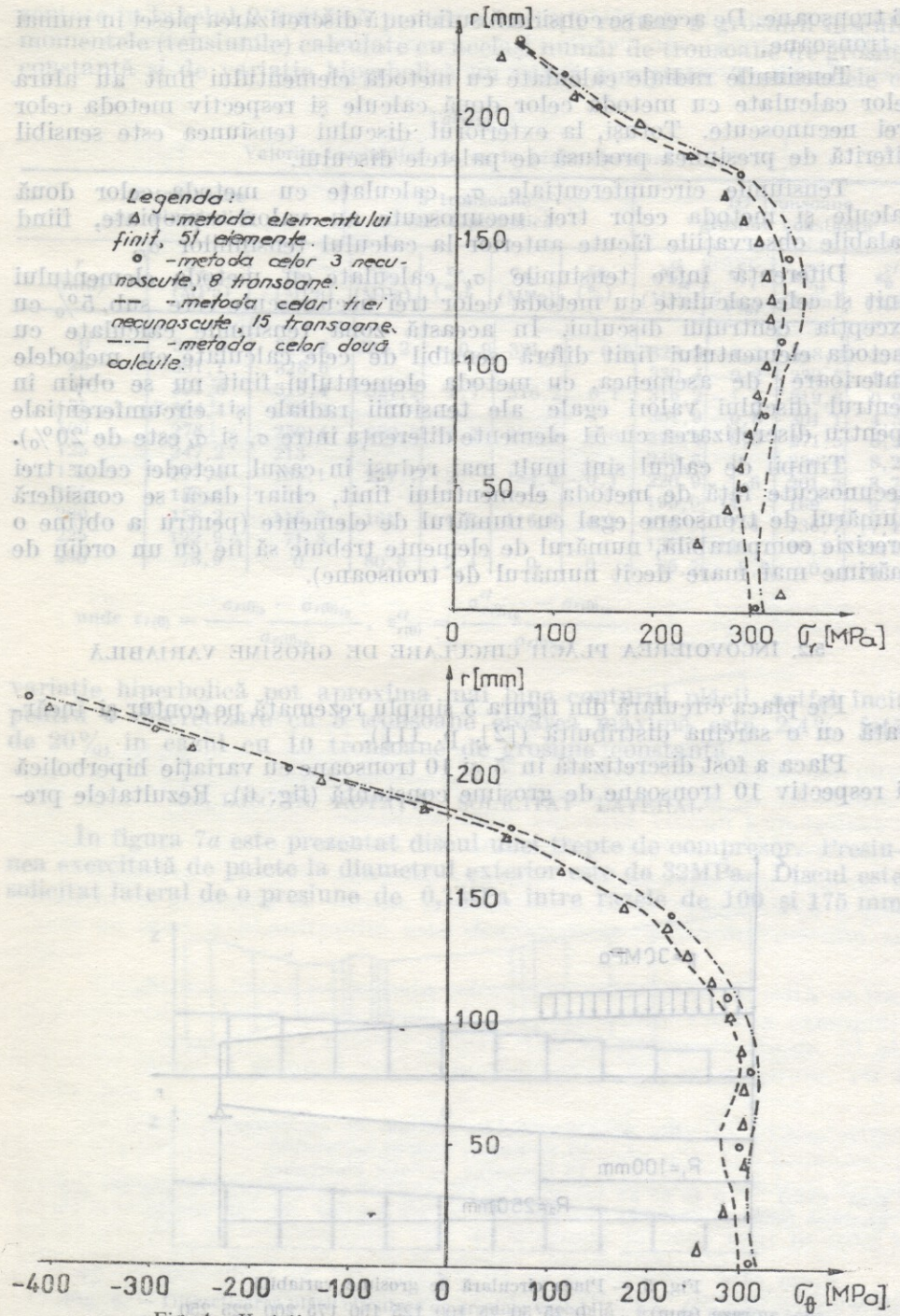

Fig. 4.—Variaţia tensiunilor σ_r şi σ_θ în discul de turbină.

16 tronsoane. De aceea se consideră suficientă discretizarea piesei în numai 8 tronsoane.

Tensiunile radiale calculate cu metoda elementului finit au alura celor calculate cu metoda celor două calcule și respectiv metoda celor trei necunoscute. Totuși, la exteriorul discului tensiunea este sensibil diferită de presiunea produsă de paletele discului.

Tensiunile circumferențiale σ_t calculate cu metoda celor două calcule și metoda celor trei necunoscute au valori apropiate, fiind valabile observațiile făcute anterior la calculul tensiunilor σ_r.

Diferența între tensiunile σ_t calculate cu metoda elementului finit și cele calculate cu metoda celor trei necunoscute este sub 5% cu excepția centrului discului. În această zonă tensiunile calculate cu metoda elementului finit diferă sensibil de cele calculate cu metodele anterioare; de asemenea, cu metoda elementului finit nu se obțin în centrul discului valori egale ale tensiunii radiale și circumferențiale (pentru discretizarea cu 51 elemente diferența între σ_r și σ_t este de 20%).

Timpii de calcul sînt mult mai reduși în cazul metodei celor trei necunoscute față de metoda elementului finit, chiar dacă se consideră numărul de tronsoane egal cu numărul de elemente (pentru a obține o precizie comparabilă, numărul de elemente trebuie să fie cu un ordin de mărime mai mare decît numărul de tronsoane).

5.2. ÎNCOVOIEREA PLĂCII CIRCULARE DE GROSIME VARIABILĂ

Fie placa circulară din figura 5 simplu rezemată pe contur și încărcată cu o sarcina distribuită ([2], p. 111).

Placa a fost discretizată în 5 și 10 tronsoane cu variație hiperbolică și respectiv 10 tronsoane de grosime constantă (fig. 6). Rezultatele pre-

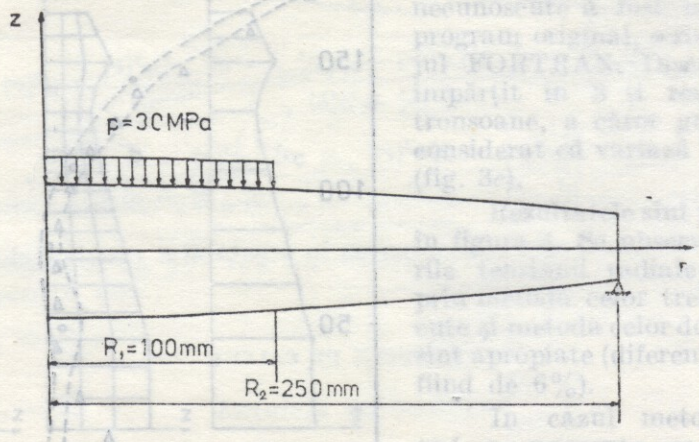

Fig. 5. — Placa circulară de grosime variabilă

raza (mm)	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
grosimea (mm)	60	59	58	56	53	50	48	44	40	35	30

zentate în tabelul 2 arată că pentru o variație redusă a grosimii discului momentele (tensiunile) calculate cu același număr de tronsoane de grosime constantă și de variație hiperbolică au valori apropiate. Tronsoanele cu

Tabelul 2

Valorile tensiunilor σ_r, σ_θ în placa circulară

	10 tronsoane var. hiperbolică		5 tronsoane var. hiperbolică				10 tronsoane grosime constantă			
r (mm)	$\sigma_{r_{10}}$ (MPa)	$\sigma_{\theta_{10}}$ (MPa)	σ_{r_5} (MPa)	ε_r (%)	σ_{θ_5} (MPa)	ε_θ (%)	$\sigma^{ct}_{r_{10}}$ (MPa)	ε^{ct}_r (%)	$\sigma^{ct}_{\theta_{10}}$ (MPa)	ε^{ct}_θ (%)
0	324,2	324,2	321,2	−0,9	321,0	−0,9	328,3	1,3	328,3	1,3
25	331,1	328,6					330,4	−0,2	332,7	1,2
50	321,6	316,4	327,2	1,7	316,2	0,1	316,2	−1,7	319,3	0,9
75	304,4	288,2					301,9	−0,8	301,1	4,5
100	278	250,4	282,7	1,7	250,5	0,0	279,4	0,5	271,3	8,3
125	247,2	213					249,6	1	230,4	8,2
150	217,4	185,1	221,7	2	184,9	−0,1	220,9	1,6	201,3	8,7
175	188,4	154′					195,0	4	169,	9,7
200	158,2	116,7	161	1,8	116,8	0,1	170	7,4	136,7	17,1
225	122,9	71,8					137,7	12	86,1	19,9
250	78,9	0	80,8	2,4	0	0	86,7	9,9	0	0

unde $\varepsilon_{r(\theta)} = \dfrac{\sigma_{r(\theta)_5} - \sigma_{r(\theta)_{10}}}{\sigma_{r(\theta)_{10}}}$, $\varepsilon^{ct}_{r(\theta)} = \dfrac{\sigma^{ct}_{r(\theta)_{10}} - \sigma_{r(\theta)_{10}}}{\sigma_{r(\theta)_{10}}}$

variație hiperbolică pot aproxima mai bine conturul plăcii, astfel încît pentru o discretizare cu 5 tronsoane eroarea maximă este 2,4%, față de 20%, în cazul cu 10 tronsoane de grosime constantă.

5.3. DISC ÎN ROTAȚIE SOLICITAT LATERAL

În figura 7*a* este prezentat discul unei trepte de compresor. Presiunea exercitată de palete la diametrul exterior este de 32MPa. Discul este solicitat lateral de o presiune de 0,1MPa între razele de 100 și 175 mm

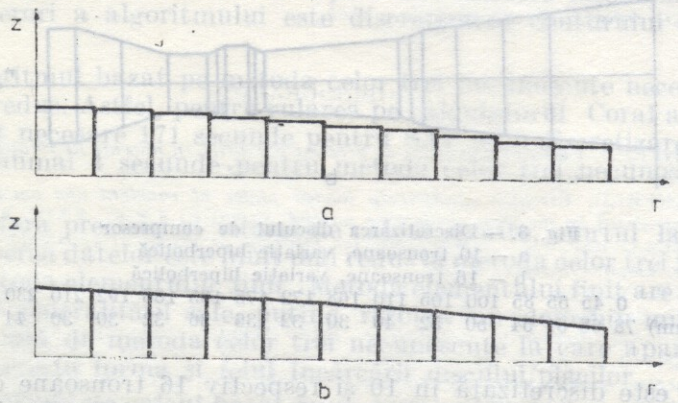

Fig. 6. — Discretizarea plăcii circulare de grosime variabilă : a — cu grosime constantă, 10 tronsoane ; b — cu grosime variind hiperbolic, 10 tronsoane.

şi de o presiune de 0,08 MPa între razele de 185 şi 210 mm. Turaţia este de 10500 rot/min, iar distribuţia temperaturilor şi caracteristicilor materialului sînt prezentate în figura 7*b*.

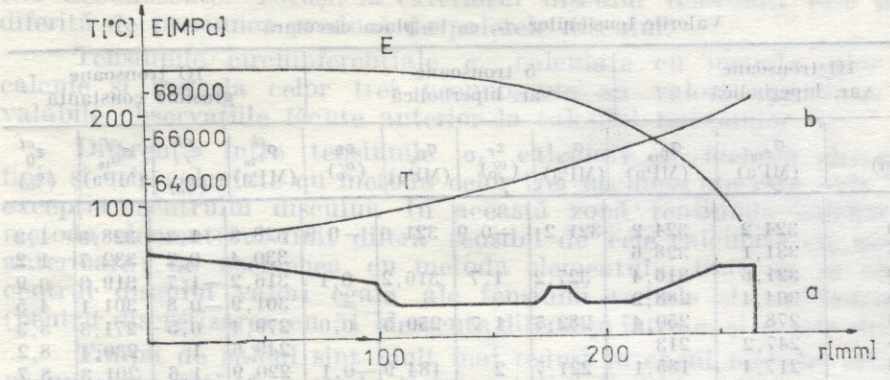

Fig. 7. — Disc de compresor, solicitat lateral

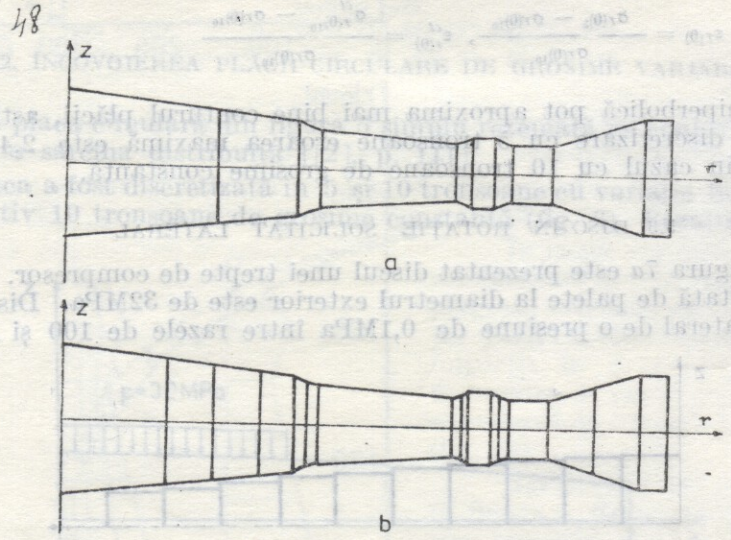

Fig. 8. — Discretizarea discului de compresor
a — 10 tronsoane, variaţie hiperbolică
b — 16 tronsoane, variaţie hiperbolică

raza (mm)	0	45	65	85	100	105	110	168	172	175	185	188	192	210	230	250	265
grosimea (mm)	78	68	61	54	50	52	40	30	32	36	36	32	30	30	44	60	60

Piesa este discretizată în 10 şi respectiv 16 tronsoane cu variaţie hiperbolică (fig. 8). Rezultatele prezentate în figura 9 arată o bună apropiere între valorile tensiunilor corespunzătoare celor două discretizări.

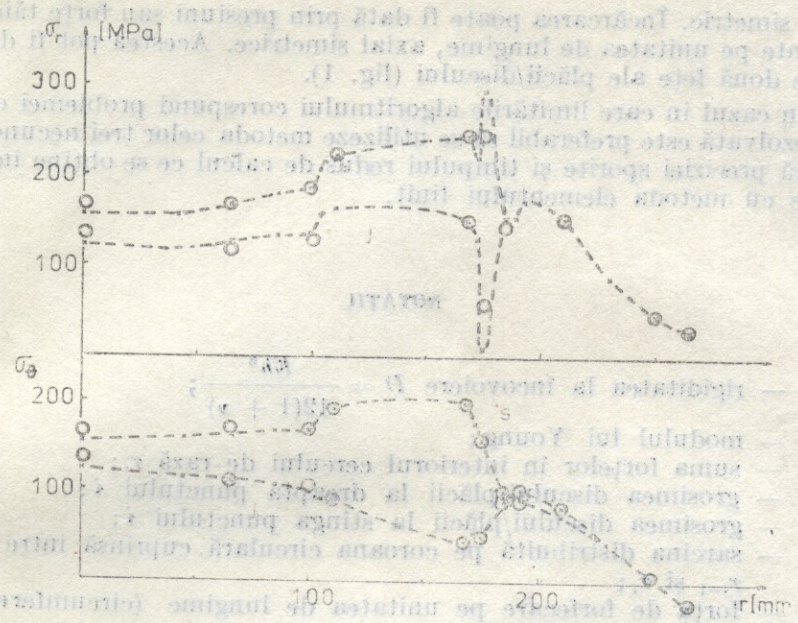

Fig. 9. — Valorile tensiunilor σ_r și σ_θ în discul de compresor: s — pe contur, sus; j — pe contur, jos; 0 — varianta cu 10 tronsoane; x — varianta cu 16 tronsoane.

6. CONCLUZII

Similitudinea ecuațiilor de echilibru ale discurilor și plăcilor circulare cu variație hiperbolică a permis, utilizînd metoda de recurență a celor trei necunoscute, realizarea unui algoritm comun concretizat în programul de calcul cu care au fost analizate exemplele de la capitolul 5.

Folosirea relațiilor analitice permite obținerea soluției exacte, cu condiția ca grosimea să varieze hiperbolic. Aceasta înseamnă că singura sursă de erori a algoritmului este discretizarea conturului discului sau plăcii.

Algoritmul bazat pe metoda celor trei necunoscute necesită un timp de calcul redus. Astfel, pentru rularea pe calculatorul Coral a exemplului 5.1 au fost necesare 171 secunde pentru SAP cu o discretizare de 51 elemente și numai 1 secunde pentru metoda celor trei necunoscute, cu 16 tronsoane.

În afara preciziei și vitezei de calcul sporite, efortul la discretizare și introducerea datelor este mult mai redus la metoda celor trei necunoscute față de metoda elementului finit. Metoda elementului finit are însă marele avantaj al generalității sale, putînd rezolva un domeniu mult mai vast de cazuri față de metoda celor trei necunoscute la care apar limitări în ceea ce privește forma și felul încărcării discului/plăcilor.

Programul de calcul bazat pe metoda celor trei necunoscute poate fi utilizat însă numai pentru discuri și/sau plăci axial simetrice care au

contur simetric. Încărcarea poate fi dată prin presiuni sau forţe tăietoare constante pe unitatea de lungime, axial simetrice. Acestea pot fi diferite pe cele două feţe ale plăcii/discului (fig. 1).

În cazul în care limitările algoritmului corespund problemei ce trebuie rezolvată este preferabil să se utilizeze metoda celor trei necunoscute datorită preciziei sporite şi timpului redus de calcul ce se obţine în comparaţie cu metoda elementului finit.

NOTAŢII

D — rigiditatea la încovoiere $D = \dfrac{Eh^3}{12(1+\nu)}$;
E — modulul lui Young;
F_i — suma forţelor în interiorul cercului de rază r_i;
h_i^{dr} — grosimea discului/plăcii la dreapta punctului i;
h_i^{st} — grosimea discului/plăcii la stînga punctului i;
p_i — sarcina distribuită pe coroana circulară cuprinsă între razele r_{i-1} şi r_i;
Q — forţa de forfecare pe unitatea de lungime (circumferenţial);
u — deplasarea radială;
u_p' — derivata soluţiei particulare u_p;
α — coeficientul de dilatare;
Φ — panta suprafeţei meridiane;
Φ_p' — derivata soluţiei particulare Φ_p;
ν — coeficientul lui Poisson;
ρ — densitatea;
θ — deformaţia specifică datorată gradientului de temperatură pe rază, $\theta = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$.

Primit în redacţie la 20 decembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. M. BLUMENFELD, *Calculul discurilor de grosime variabilă în mişcare de rotaţie prin metoda celor trei necunoscute*, St. cerc. mec. apl., **14**, 1 (1963).
2. M. BLUMENFELD, *Circular symetricaly loaded plates of constant and variable thickness, calculated by the three unknowns method*, Buletinul I.P.B., **XXIV**, 3 (1962).
3. S. D. PONOMARIOV, ş.a., *Bazele metodelor moderne de calcul de rezistenţă în construcţia de maşini*, Masgiz, 1952.
4. H. D. CONWAY, *Note on Bending of Circular Plates of Variable Thickness*, Journal of Applied Mechanics, **16**, 2 (1949).
5. Gh. BUZDUGAN, *Rezistenţa materialelor*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1980, p. 424—426.
6. M. BLUMENFELD, *Relaţii generalizate ale metodei de recurenţă a celor trei necunoscute, pentru studiul sistemelor elastice*, St. cerc. mec. apl., **14**, 3, (1963).
7. S. S. MANSON, *Determination of elastic stresses in gas-turbine discs*, NACA Report 871, 1947.
8. S. D. PONOMARIOV, ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, volum **III**, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1964, p. 138—141.